به نام خدا



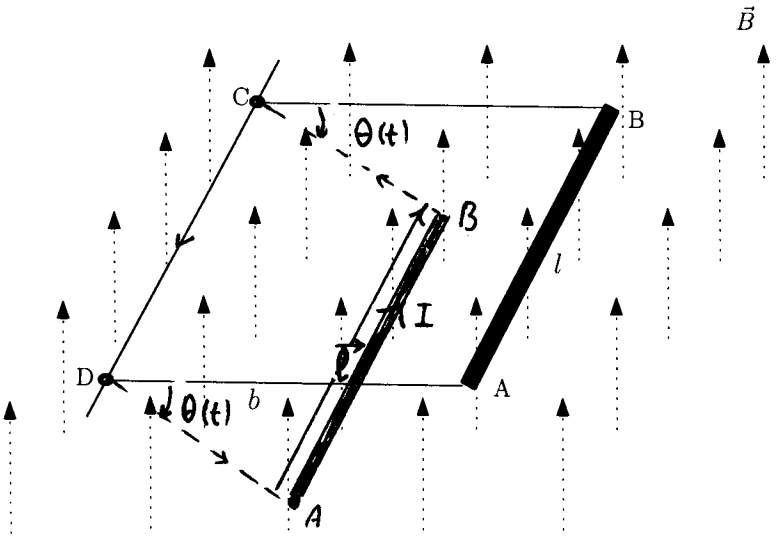
سایت گروه آموزشی آلم

ابتدایی، راهنمایی، دبیرستان، کنکور و دانشگاه

www.g-alm.ir	
www.g-alm.ir/ac	دانشگاه
www.g-alm.ir/forum	انجمن
www.g-alm.ir/azmoon	آزمون های آلم
www.g-alm.ir/shop	فروشگاه
www.film.g-alm.ir	فیلم های آموزشی

www.g-alm.ir

۱.



اگر در لحظه t ، زاویه صفحه $ABCD$ با صفحه افقی اولیه $\theta(t)$ باشد شار مغناطیسی گذرنده از حلقه $ABCD$ برابر است با

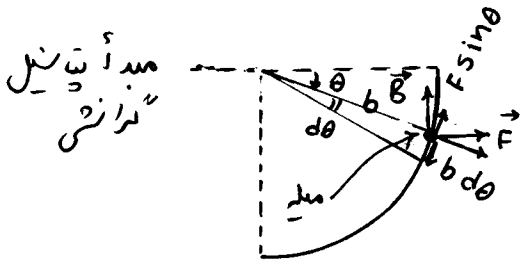
(الف) $\Phi_B = lb\cos\theta(t)\, B$

نیروی محرکه القایی $\mathcal{E} = \left|-\frac{d\Phi_B}{dt}\right|$ ، $\mathcal{E} = IR$.

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = lbB\,\underbrace{\frac{d\theta(t)}{dt}}_{\omega}\left(-\sin\theta(t)\right) \Rightarrow I = \frac{\omega blB\sin\theta}{R}$$

(ب) $\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$, $\vec{l}\perp\vec{B}$ $\Rightarrow$ $F = IlB \Rightarrow F = \frac{\omega bl^2B^2\sin\theta}{R}$

(ج) با توجه به شکل، هنگام جابجایی میله AB به اندازه $d\theta$ ، جابجایی $bd\theta$ و نیرو در خلاف جهت آن $F\sin\theta$ است. بنابراین



$$dW_F = -(F\sin\theta)\, b\, d\theta$$

در نتیجه $\frac{dW_F}{dt} = -Fb\sin\theta\,\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = -\frac{\omega^2b^2l^2B^2\sin^2\theta}{R}$

(د) $\frac{dQ}{dt} = -\frac{dW_F}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\omega^2b^2l^2B^2\sin^2\theta}{R}$

(هـ) با توجه به شکل قسمت ج) و نسبت به مبدأ مشخص شده، انرژی پتانسیل گرانشی میله برابر است با U.

$$U = -mgb\sin\theta \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -mgb\cos\theta\,\omega$$

(و) کار کل انجام شده روی میله سبب تغییر انرژی جنبشی میله می‌شود. (dW_g: کار نیروی وزن، dW_F: کار نیروی F)

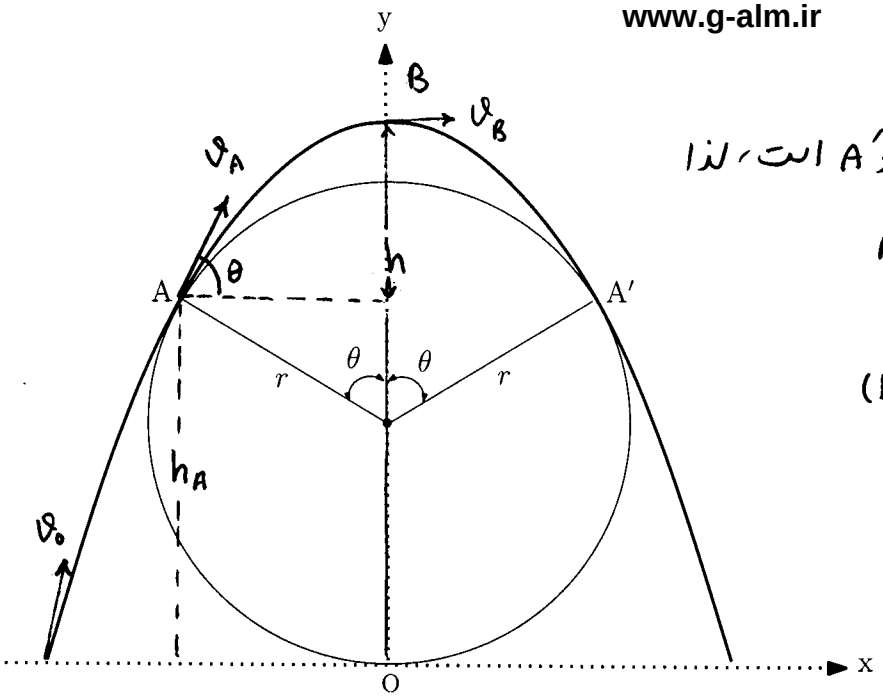
$$dT = dW_g + dW_F$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW_g}{dt} + \frac{dW_F}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = mgb\omega\cos\theta - \frac{\omega^2b^2l^2B^2\sin^2\theta}{R}$$

www.g-alm.ir/film www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

۲.



(الف) AA' برد مسیر بین نقطه‌ی A و A' است، لذا

$$AA' = 2r\sin\theta = \frac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$$

بنابراین

$$(1)\quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{rg}{\cos\theta}}}$$

(ب) درغیاب مقاومت هوا بین نقطه‌ی پرتاب (روی سطح زمین) و نقطه‌ی A قضیه‌ی اندازه‌ی مکانیکی می‌نویسیم

$$h_A = r + r\cos\theta \qquad ,\qquad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

بنابراین

$$(2)\quad \boxed{v_0 = \sqrt{rg\left(\frac{1}{\cos\theta} + 2 + 2\cos\theta\right)}}$$

(ج) مطابق شکل ارتفاع اوج، $OB = H$، برابر است با

$$H = h_A + h$$

که h ارتفاع اوج پرتابه بین A و A' است، یعنی

$$h = \frac{v_A^2 \sin^2\theta}{2g}$$

بنابراین

$$(3)\quad \boxed{H = r\left(1 + \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\right)}$$

(د) اگر پرتابه در نقطه‌ی B برافتاده شود $\theta = 0$ است و از معادلات (۲) و (۳) داریم

$$H = 2r \qquad ,\qquad \boxed{v_0 = \sqrt{5rg}}$$

(هـ) پرتابه قرار است از نقطه‌ی مناسبی روی سطح زمین با کمینه‌ی سرعتی پرتاب شود که بتواند از روی استوانه بگذرد.

$$\frac{dv_0}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 2\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta\,(1 - 2\cos^2\theta) = 0$$

$\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$ ریشه‌های معادله‌اند.

$$v_0(\theta = \tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})rg} \qquad ,\qquad v_0(\theta = 0) = \sqrt{5rg} \qquad ,\qquad \sqrt{2+2\sqrt{2}} < \sqrt{5}$$

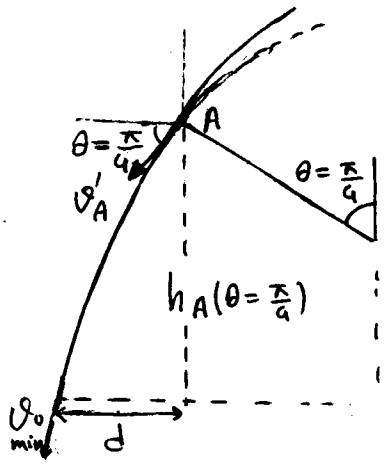
بنابراین به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$، $\boxed{v_{0\min} = \sqrt{(2+2\sqrt{2})rg}}$ و

$$H(\theta = \tfrac{\pi}{4}) = r\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) > 2r$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

(۶) با توجه به تقارن مسیر، فرض می‌کنیم پرتابه از نقطهٔ A با سرعت v'_A و زاویهٔ $\theta=\frac{\pi}{4}$ پرتاب شده و با سرعت $v_{0\min}$ به زمین برسد، یعنی



$$v_{0\min}^2 = 2gh_A + v_A'^2 \quad (5)$$

و معادلهٔ مسیر نسبت به مبدأ واقع در A:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_A'^2\cos^2\theta} + x\tan\theta \quad (4), \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

با قرار دادن (۴) در (۵) و اینکه $h_A = r(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ بدست می‌آوریم:

$$v_A'^2 = \sqrt{2}\,rg$$

مختصات محل برخورد پرتابه به زمین نسبت به A $(d, -h_A)$ است که در معادلهٔ (۴) قرار می‌دهیم

$$-\frac{r}{2}(2+\sqrt{2}) = \frac{-gd^2}{2\sqrt{2}rg(\frac{1}{2})} + d(-1)$$

$$\sqrt{2}d^2 + 2rd - r^2(2+\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow d = r\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$$

پس مکان پرتابه از روی سطح زمین نسبت به مبدأ O

$$R = -d - \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{R = -\frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}r}$$

است.

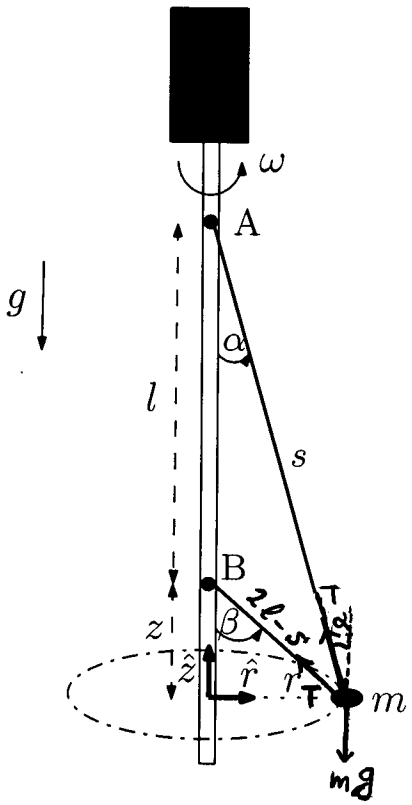
www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

۳. با صرف نظر از نیروی اصطکاک بین نخ و میله، نیروی کشش

(الف) در طول نخ T است. به جرم m، نیروی وزن mg

و دو نیروی T از طرف نخ وارد می‌شود.



(الف)

$$\hat{z}: \quad T\cos\alpha + T\cos\beta - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\hat{r}: \quad T\sin\alpha + T\sin\beta = mr\omega^2 \qquad (2)$$

(ب)

$$\sin\alpha = \frac{r}{s}\ ,\ \sin\beta = \frac{r}{2l-s}$$

$$\cos\alpha = \frac{l+z}{s}\ ,\ \cos\beta = \frac{z}{2l-s} \qquad (3)$$

(ج) از تقسیم معادله (۲) به معادله (۱) و استفاده از معادله (۳):

$$\frac{2lr}{(l+z)(2l-s)+sz} = \frac{r\omega^2}{g} \Rightarrow z = \frac{s}{2} - l + \frac{g}{\omega^2} \qquad (4)$$

از هندسه شکل:

$$r^2 = s^2 + (l+z)^2 = (2l-s)^2 - z^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{-s}{2}l + 2s \qquad (5)$$

از معادله (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$s = l + \frac{2g}{3\omega^2}\ ,\ z = \frac{-l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}}{l + \frac{2g}{3\omega^2}}\ ,\ \cos\beta = \frac{\frac{-l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}}{l - \frac{2g}{3\omega^2}}$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha + \cos\beta} \Rightarrow T = \frac{1 - \frac{4}{9}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)^2}{2\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)}\, mg$$

(د) پس از محاسبه $\sin\alpha$ از روی $\cos\alpha$:

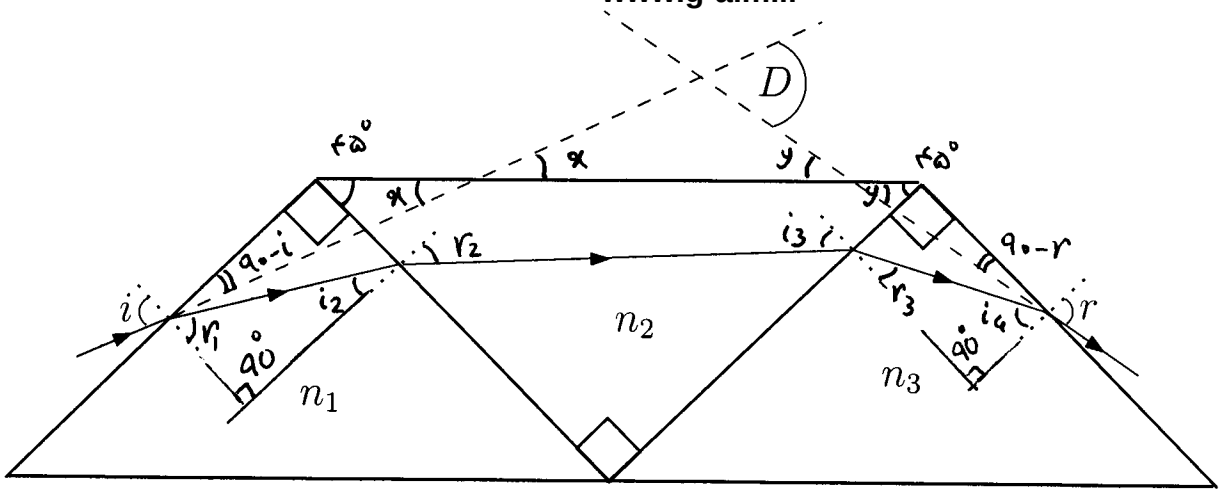
$$r = s\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}l^2 - \frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4}}$$

$$r>0 \Rightarrow \frac{3}{4}l^2 > \frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4} \Rightarrow \omega^2 > \frac{4}{3}\frac{g}{l} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{4g}{3l}}$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

۴.



(الف) قانون اسنل را در مرز هر دو منشور می نویسیم

$$\sin i = n_1 \sin r_1$$
$$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2$$
$$n_2 \sin i_3 = n_3 \sin r_3$$
$$n_3 \sin i_4 = \sin r$$

مطابق شکل $r_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ ، $r_2 + i_3 = \frac{\pi}{2}$ ، $r_3 + i_4 = \frac{\pi}{2}$ بنابراین

$$\sin i = n_1 \cos i_2$$
$$n_2 \cos i_3 = n_1 \sin i_2$$
$$n_2 \sin i_3 = n_3 \cos i_4$$
$$\sin r = n_3 \sin i_4$$

هر معادله را به توان ۲ می رسانیم و سپس با هم جمع می کنیم

$$\Longrightarrow \quad \sin^2 i + n_2^2 + \sin^2 r = n_1^2 + n_3^2$$

$$r = \sin^{-1}\left(\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}\right)$$

(ب) D زاویه خارجی مثلث است که برابر است با مجموع دو زاویه x و y یعنی $D = x + y$

اما با توجه به شکل $90 - i + 135 + x = 180$ و $90 - r + 135 + y = 180$

بنابراین $x = i - 45°$ و $y = r - 45°$ ولذا $D = i + r - 90$

که با قرار دادن ۲ از قسمت الف) در معادله اخیر

$$D = i + \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i} - \frac{\pi}{2}$$

(ج) $D = 0 \Leftarrow \frac{\pi}{2} - i = \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}$

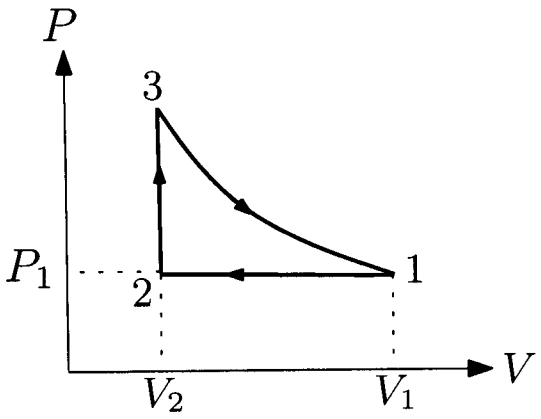
از دو طرف sin می گیریم $\cos i = \sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}$

به توان ۲ می رسانیم، در نتیجه $D = 0$ است اگر: $n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 = 1$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

۵.



ابتدا با استفاده از معادله حالت "گاز

$$P(V-nb)=nRT$$

دما را در نقاط 1 و 2 محاسبه می‌کنیم

$$T_1 = \frac{P_1(V_1-nb)}{nR} \qquad (1)$$

$$T_2 = \frac{P_1(V_2-nb)}{nR} \qquad (2)$$

فرآیند 1→3 بی‌دررو است که در آن $T(V-nb)^{R/C_{mV}}$ ثابت است، پس

$$T_3(V_2-nb)^{R/C_{mV}} = T_1(V_1-nb)^{R/C_{mV}} \qquad (3)$$

که با قرار دادن T_1 از معادله (1) در (3)

$$T_3 = \frac{P_1(V_1-nb)}{nR}\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{R/C_{mV}} \qquad (4)$$

در فرآیند 3→1 : $Q_{3\to1}=0$

در فرآیند 1→2 برای اینکه در فشار ثابت حجم کاهش یابد، باید گرما از "گاز" گرفته شود.

در فرآیند 2→3 برای اینکه در حجم ثابت فشار افزایش یابد، باید به "گاز" گرما داده شود.

$$Q_{in} = Q_{2\to3} \quad , \quad Q_{out} = |Q_{1\to2}| \quad , \quad W = Q_{in} - Q_{out} \text{ (در یک چرخه)}$$

بازده $e = \frac{W}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}}$

قانون اول ترمودینامیک را بین نقطه 1 و 2 می‌نویسیم

$$U_2 - U_1 = W_{1\to2} + Q_{1\to2}$$

$$U_2 - U_1 = nC_{mV}(T_2-T_1) = \frac{C_{mV}P_1}{R}(V_2-V_1)$$

$$W_{1\to2} = -\int_{V_1}^{V_2} P_1\,dV = -P_1(V_2-V_1)$$

بنابراین

$$Q_{1\to2} = -P_1(V_1-V_2)\left(1+\frac{C_{mV}}{R}\right)$$

$$Q_{out} = P_1(V_1-V_2)\left(1+\frac{C_{mV}}{R}\right)$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

قانون اول ترمودینامیک را بین نقطه ۲ و ۳ می‌نویسیم

$$U_3 - U_2 = W_{2\to3} + Q_{2\to3}$$

$$U_3 - U_2 = nC_{mv}(T_3 - T_2) = nC_{mv}\left(\frac{P_1(V_1-nb)}{nR}\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{R/C_{mv}} - \frac{P_1(V_2-nb)}{nR}\right)$$

$$= \frac{C_{mv}}{R}P_1(V_2-nb)\left(\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{\frac{R}{C_{mv}}+1} - 1\right)$$

$$W_{2\to3} = 0$$

$$Q_{in} = Q_{2\to3} = \frac{C_{mv}}{R}P_1(V_2-nb)\left(\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{\frac{R}{C_{mv}}+1} - 1\right)$$

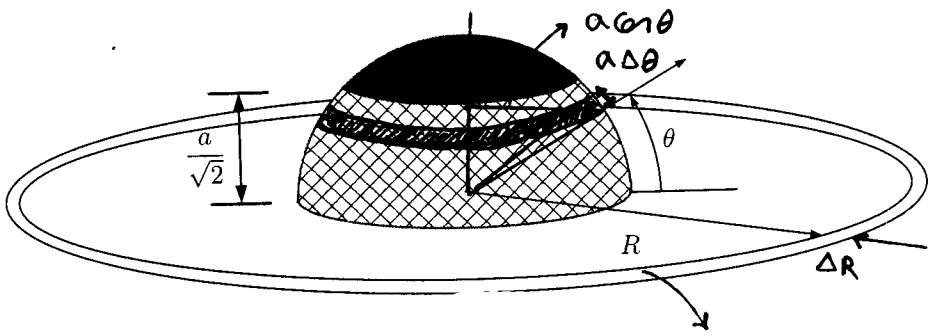
$$e = 1 - \frac{1+\frac{R}{C_{mv}}}{\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{1+R/C_{mv}} - 1}\;\frac{V_1-V_2}{V_2-nb}$$

سوال ۳

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir

۶.



(الف) با فرض اینکه قطره از مرکز کره با سرعت v_0 تحت زاویه θ پرتاب می‌شود

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

مساحت این حلقه $2\pi R \Delta R$ است.

(ب)

$$\Delta R = R(\theta + \Delta\theta) - R(\theta)$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta\theta} = \frac{R(\theta+\Delta\theta) - R(\theta)}{\Delta\theta}$$

برای $\Delta\theta \to 0$:

$$\Delta R = \frac{dR}{d\theta}\,\Delta\theta$$

$$\Delta R = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g}\,\Delta\theta$$

(ج) مقدار آبی که به نواری به مساحت $2\pi R \Delta R$ روی سطح زمین می‌رسد مربوط به نواری روی سطح نیمکره به پهنای $a\Delta\theta$ و طول $2\pi a\cos\theta$ است، یعنی مساحت $(2\pi a\cos\theta)(a\Delta\theta)$.

اگر تعداد سوراخ‌ها در واحد سطح نیمکره n_0 باشد و از هرکدام در واحد زمان به مقدار Q آب خارج شود، پس از نوار به مساحت $2\pi a^2 \cos\theta\, \Delta\theta$ مقدار آب خارج شده برابر است با $(2\pi a^2\cos\theta\Delta\theta)(n_0 Q)$.

با یک تناسب مقدار $2\pi a^2\cos\theta\Delta\theta\, n_0 Q$ روی سطح $2\pi R\Delta R$ توزیع می‌شود ولذا سهم واحد سطح برابر است با

$$\frac{\text{آب رسیده به واحد سطح زمین در واحد زمان}}{} = \frac{2\pi a^2 n_0 Q \cos\theta\Delta\theta}{2\pi R\Delta R}$$

با قرار دادن R و ΔR از قسمت الف) و ب)

$$= n_0 a^2 Q \left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2 \frac{\cos\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}$$

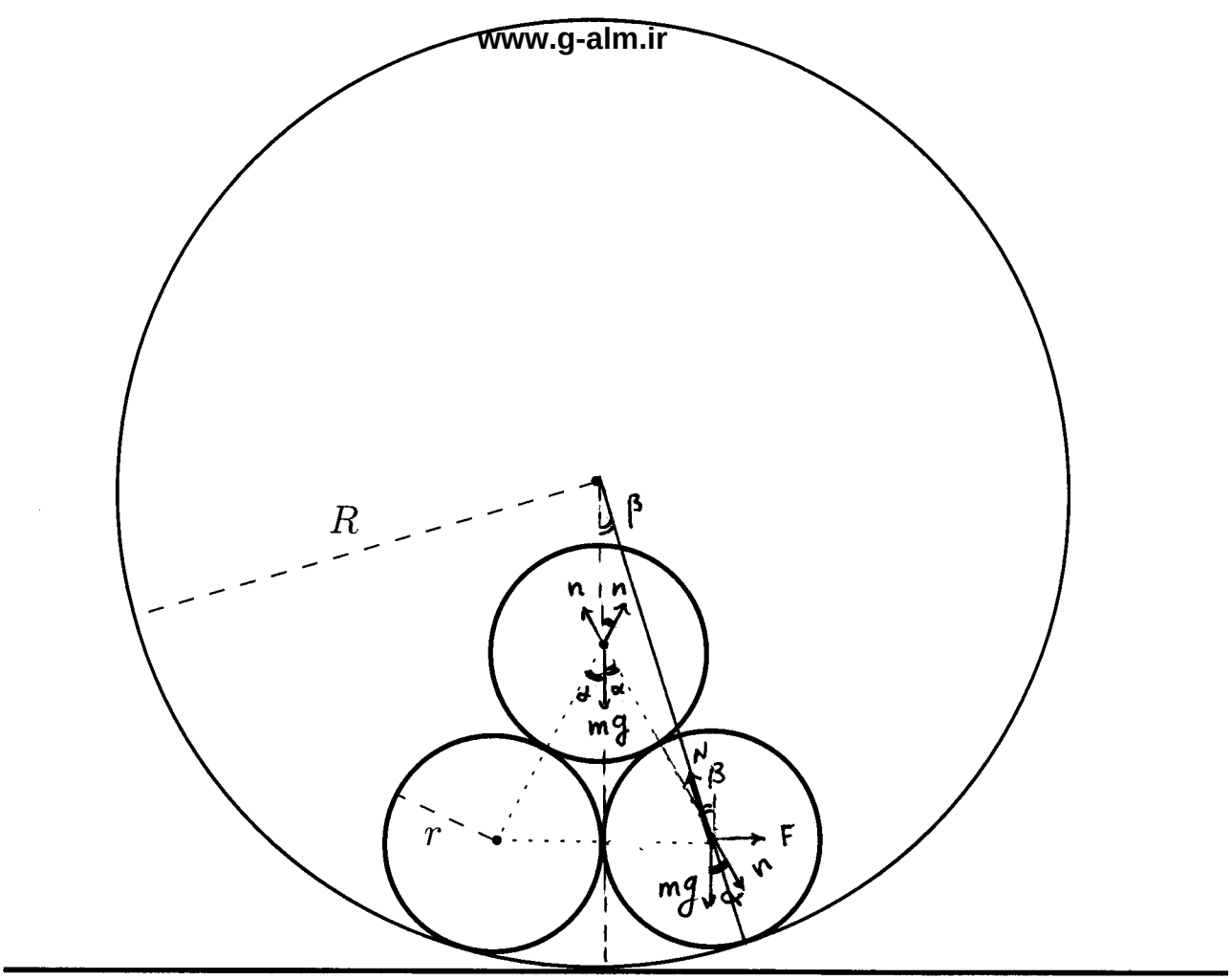
اما در فاصله $R = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}$ و با توجه به $R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$ داریم $\theta = 30^\circ$ و بنابراین

$$= n_0 a^2 Q \left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2$$

لازم به ذکر است که اگر عدد چنین $\theta > \frac{\pi}{4}$ روی سطح کره مسدود نبود از دو زاویه θ آب با برد R می‌رسیدند.

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir



نیروهای وارد بر استوانه بالایی n ، n از سوی دو استوانه زیری و mg وزن آن است.

نیروهای وارد بر استوانه زیری سمت راستی n از سوی استوانه بالایی، F از سوی استوانه سمت چپی N از سوی استوانه بزرگ و mg وزن آن است.

شرط تعادل استوانه بالایی :

$$2n\cos\alpha = mg$$

شرط تعادل استوانه زیری:

$$F + n\sin\alpha = N\sin\beta$$
$$N\cos\beta = mg + n\cos\alpha$$

در ضمن، مطابق شکل :

$$\sin\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}, \quad \sin\beta = \frac{r}{R-r}$$

از سه معادله اول :

$$F = \frac{mg}{2}\left(3\tan\beta - \tan\alpha\right)$$

همچنین

$$\tan\beta = \frac{1}{\cot\beta} \Rightarrow \quad 1+\cot^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \Rightarrow \tan\beta = \frac{r}{\sqrt{R^2-2rR}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین

$$F = \frac{mg}{2}\left(\frac{3r}{\sqrt{R^2-2rR}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

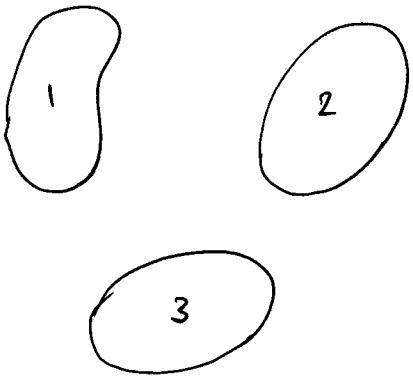
به شرطی لوله‌های زیری در پایین باهم می‌مانند که $F>0$ باشد یعنی :

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right) - 27 < 0$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)_{max} = 1+2\sqrt{7}$$ ، پس باید $$\frac{R}{r} < 1+2\sqrt{7}$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir

www.g-alm.ir



$Q_1 = 25\,\mu C$, $Q_2 = 10\,\mu C$, $Q_3 = 15\mu C$

$V_1 = 10\ V$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$

$\Downarrow$

$\alpha_1 = 2.5\ \mu C/V$, $\alpha_2 = 1\ \mu C/V$, $\alpha_3 = 1.5\ \mu C/V$

$Q_1 = 35\,\mu C$, $Q_2 = 60\,\mu C$, $Q_3 = 25\mu C$

$V_1 = 10\ V$, $V_2 = 10\ V$, $V_3 = 0$

$\Downarrow$

$\beta_1 = 1\ \mu C/V$, $\beta_2 = 5\ \mu C/V$, $\beta_3 = 1\mu C/V$

$Q_1 = 50\ \mu C$, $Q_2 = 70\,\mu C$, $Q_3 = 50\ \mu C$

$V_1 = 10\ V$, $V_2 = 10\ V$, $V_3 = 10\ V$

$\Downarrow$

$\gamma_1 = 1.5\ \mu C/V$, $\gamma_2 = 1\ \mu C/V$, $\gamma_3 = 2.5\ \mu C/V$

$-Q = 2.5V_1 + V_2 + 1.5V_3$

$Q = V_1 + 5V_2 + V_3$

$0 = 1.5V_1 + V_2 + 2.5V_3$

به ازای $Q_3 = 0$ و بنا به تعریف خازن: $Q_2 = -Q_1 = Q$ $\Leftarrow$

با تکرار داریم: V_3 از معادله سوم در دو معادله اول:

$$\begin{cases} -Q = \frac{8}{5}V_1 + \frac{2}{5}V_2 \\ Q = \frac{2}{5}V_1 + \frac{23}{5}V_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = -\frac{25}{36}Q \qquad V_2 = \frac{5}{18}Q$$

که Q برحسب μC ، V_1 ، V_2 برحسب ولت اند.

$$\Delta V = V_2 - V_1 \ , \ \Delta V = \frac{Q}{C}$$

$\Downarrow$

$$C = \frac{36}{35}\,\mu F = 1.03\,\mu F$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac www.film.g-alm.ir